Tentamen Biologische Modellering (B-B2THE05) **17 oktober 2019, EDUC-ALPHA**

Vraag 1. Wiskunde (6 punten)
Beschouw het volgende model:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bxy \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cxy - dy \quad \text{voor} \quad x \geq 0 \quad \text{en} \quad y \geq 0\ .$$

a. Teken een toestandsruimte met de nullijnen (nullclines), het vectorveld, en geef aan voor welke waarden de nulllijnen de assen snijden.
b. Bepaal de stabiliteit van het niet-triviale evenwicht door de eigenwaardes van de Jacobiaan uit te rekenen.

Vraag 2. Resource-consumer model (6 punten)
Beschouw het volgende model:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rR - \frac{aRN}{h+R} \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{caRN}{h+R} - dN\ .$$

a. Wat is de evenwichtswaarde van de resource?
b. Teken een toestandsruimte met de nullijnen, het vectorveld, en geef aan voor welke waarden de nulllijnen de assen snijden.
c. Bepaal de stabiliteit van alle evenwichten (de wijze waarop je dit doet mag je zelf kiezen).
d. Wat verwacht je voor gedrag van dit model?

Vraag 3. Epidemiologie (6 punten)
We hebben het SIR model voor groei van een epidemie op twee manieren geschreven,

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = s - dS - \beta SI\ , \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - (\delta + r)I\ , \quad \text{met} \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rI - dR\ ,$$

en als

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = s - dS - \frac{\beta SI}{N}\ , \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta SI}{N} - (\delta + r)I\ , \quad \text{met} \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rI - dR\ ,$$

waar $N = S + I + R$. In beide modellen beschouwen we een tijdschaal van dagen.
a. Wat is de dimensie van β in beide modellen?
b. Wat is het biologische verschil tussen deze twee modellen?
c. Wat is de R_0 van beide modellen?

Vraag 4. Bacteriën (7 punten)
Bacteriën reguleren hun enzymconcentraties zo dat ze precies opnemen wat ze nodig hebben om te groeien. Dus neem aan dat de opnamesnelheid van de twee belangrijkste nutriënten (koolstof en nitraat) proportioneel is aan de replicatiesnelheid van de bacteriën. Beschouw een chemostaat met twee soorten bacteriën die verschillen in zowel hun koolstof en nitraat compositie. Omdat beide resources essentieel zijn schrijven we het volgende model,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= N_1\Big[b_1 \frac{R_1}{h_{11}+R_1} \frac{R_2}{h_{12}+R_2} - d\Big]\ ,\\
\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= N_2\Big[b_2 \frac{R_1}{h_{21}+R_1} \frac{R_2}{h_{22}+R_2} - d\Big]\ ,\\
\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t} &= s_1 - dR_1 - \dots\ ,\\
\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t} &= s_2 - dR_2 - \dots\ ,
\end{aligned}$$

waar R_1 de concentratie koolstof is en R_2 de nitraat concentratie weergeeft.
a. Waarom hebben alle vergelijkingen dezelfde d parameter?

b. Wat is de replicatiesnelheid van N_1 als $R_1 = h_{11}$ en $R_2 = h_{12}$?

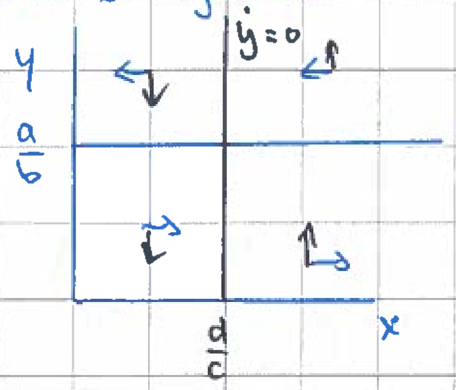
c. Wat is de minimale koolstof concentratie voor N_1 om te kunnen overleven in deze chemostaat?

d. Voltooi de twee resource vergelijkingen door de opname van de nutriënten in te vullen.

Antwoordvel
Vraag: Naam: Student nummer: Antwoord model

1a $\dot{x}=0 \to y = a/b$ $\qquad \dot{y}=0 \to x = d/c$

(2)



1b $$J = \begin{pmatrix} a-b\bar{y} & -b\bar{x} \\ c\bar{y} & c\bar{x}-d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0\end{pmatrix}$$

(4)

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr \pm \sqrt{tr^2-4\,det}}{2}, \quad tr=0,\ det = ad$$

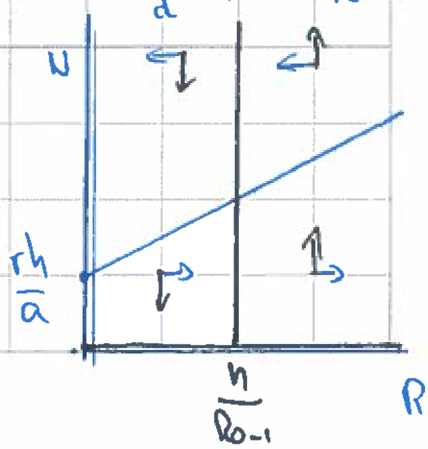
$$= \frac{\pm 2i\sqrt{ad}}{2} = \pm i\sqrt{ad}$$

complexe eigenwaarde zonder reel deel: neutraal stabiel

1 2a De resource wordt opgelost uit $\dot{N}=0$: $R = \frac{h}{\frac{ca}{d}-1} = \frac{h}{R_0-1}$

2 2b $\dot{R}=0 \to R=0$ of $\frac{r}{a}(h+R)=N$

$\dot{N}=0 \to N=0$ of $R=\frac{h}{R_0-1}$



(2) 2c $\left\{ \begin{array}{l} \text{Oorsprong: instabiel (zadelpunt)} \\ \left.\begin{array}{l}\text{Grafische Jacobiaan} \\ \text{niet-triviale punt}\end{array}\right\} \; J = \begin{pmatrix} + & - \\ + & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr} > 0 \text{ instabiel} \end{array} \right.$

(1) 2d Stabiele limiet cyclus: geen andere attractoren en geen uitsterven of explosie mogelijk

(2) 3a Model 1: βI is per dag, dus β is per geïnfecteerde per dag
Model 2: I/N is dimensieloos, dus β is per dag

(2) 3b In model 2 komt een vatbare een verwacht aantal individuen tegen waarvan de fractie I/N geïnfecteerd is.
In model 1 kan de infectiesnelheid heel groot worden als I groot wordt (mass action)

(2) 3c In model 1: $\bar{S} = s/d$ $\quad R_0 = \dfrac{\beta \frac{s}{d}}{\delta + r} = \dfrac{\beta s}{d(\delta + r)}$

In model 2: $\left.\begin{array}{l}\bar{S} = s/d \\ \bar{N} = s/d\end{array}\right\}$ $\quad R_0 = \dfrac{\beta}{\delta + r}$

Antwoordvel
Vraag: Naam: Student nummer: Antwoord model

4a Omdat dit een chemostaat is. d is de turnover rate van het medium

4b $$b_1 \frac{h_{11}}{h_{11}+h_{11}} \frac{h_{12}}{h_{12}+h_{12}} = \frac{b_1}{4}$$

4c $$\frac{b_1 R_1}{h_{11}+R_1} - d > 0 \Leftrightarrow R_1 > \frac{h_{11}}{b_1/d - 1}$$

4d $$\frac{dR_1}{dt} = s_1 - dR_1 - c_{11} b_1 N_1 \left[\frac{R_1}{h_{11}+R_1} \frac{R_2}{h_{12}+R_2}\right] - c_{21} b_2 N_2 \left[\frac{R_1}{h_{21}+R_1} \frac{R_2}{h_{22}+R_2}\right]$$

$$\frac{dR_2}{dt} = s_2 - dR_2 - c_{12} b_1 N_1 \left[\frac{R_1}{h_{11}+R_1} \frac{R_2}{h_{12}+R_2}\right] - c_{22} b_2 N_2 \left[\frac{R_1}{h_{21}+R_1} \frac{R_2}{h_{22}+R_2}\right]$$